§2. Formule de Christoffel-Darboux

Nous avons démontré la formule de récurrence

(1)
$$p_{n+1}(x) = x\,p_n(x) - \alpha_n\, p_n(x) - \beta_n\, p_{n-1}(x)$$
$$\alpha_n = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)} \qquad \beta_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$$

(valable pour les polynômes orthogonaux moniques).

On cherche à représenter la somme partielle

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(p_n, f)}{(p_n, p_n)}\, p_n(x)$$

du développement de f dans la base $\{p_n\}$ sous la forme

$$f_N(x) = \int_I P_N(x,y)\, f(y)\, dy$$

<u>Prop. 1</u> $$P_N(x,y) = \omega(y) \sum_{n=0}^{N} \frac{p_n(x)\, p_n(y)}{(p_n, p_n)}.$$

▽ $$\int_I P_N(x,y)\, f(y)\, dy = \sum_{n=0}^{N} \frac{p_n(x)}{(p_n,p_n)} \underbrace{\int_I p_n(y)\, f(y)\, \omega(y)\, dy}_{=\,(p_n,\, f)}$$
$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{(p_n, f)}{(p_n, p_n)}\, p_n(x)$$ ▼

<u>Prop. 2</u> $$P_N(x,y) = \omega(y) \cdot \frac{1}{(p_N, p_N)} \; \frac{p_{N+1}(x)\, p_N(y) - p_N(x)\, p_{N+1}(y)}{x - y}$$

▽ D'après (1) nous avons

$$p_{N+1}(x)\, p_N(y) - p_N(x)\, p_{N+1}(y) =$$
$$= \left(x\, p_N(x) - \cancel{\frac{(xp_N, p_N)}{(p_N, p_N)}\, p_N(x)} - \frac{(xp_N, p_{N-1})}{(p_{N-1}, p_{N-1})}\, p_{N-1}(x) \right) p_N(y)$$
$$- p_N(x) \left(y\, p_N(y) - \cancel{\frac{(xp_N, p_N)}{(p_N, p_N)}\, p_N(y)} - \frac{(xp_N, p_{N-1})}{(p_{N-1}, p_{N-1})}\, p_{N-1}(y) \right)$$

$$= (x-y)\, p_N(x)\, p_N(y) + \frac{(x p_N, p_{N-1})}{(p_{N-1}, p_{N-1})} \big(p_N(x)\, p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)\, p_N(y)\big)$$

Aussi, $(x p_N, p_{N-1}) = (p_N, x p_{N-1}) = (p_N, \underbrace{x p_{N-1} - p_N}_{\text{poly}_{N-1}(x)}) + (p_N, p_N)$

$= (p_N, p_N)$, et donc

donc ce produit $=0$

la formule précédente s'écrit comme

$$\frac{p_N(x)\, p_N(y)}{(p_N, p_N)} = \frac{1}{(p_N, p_N)} \, \frac{p_{N+1}(x)\, p_N(y) - p_N(x)\, p_{N+1}(y)}{x-y}$$

$$- \frac{1}{(p_{N-1}, p_{N-1})} \, \frac{p_N(x)\, p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)\, p_N(y)}{x-y}$$

Par la suite

$$\frac{p_{N-1}(x)\, p_{N-1}(y)}{(p_{N-1}, p_{N-1})} = \frac{1}{(p_{N-1}, p_{N-1})} \, \frac{p_N(x)\, p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)\, p_N(y)}{x-y}$$

$$- \frac{1}{(p_{N-2}, p_{N-2})} \, \frac{p_{N-1}(x)\, p_{N-2}(y) - p_{N-2}(x)\, p_{N-1}(y)}{x-y}$$

etc. En faisant la somme, on voit que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{p_n(x)\, p_n(y)}{(p_n, p_n)} = \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{p_0(x)}}\, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{p_0(y)}}}{(p_0, p_0)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n(x)\, p_n(y)}{(p_n, p_n)} =$$

$$= \frac{p_0(x)\, p_0(y)}{(p_0, p_0)} + \frac{1}{(p_N, p_N)} \, \frac{p_{N+1}(x)\, p_N(y) - p_N(x)\, p_{N+1}(y)}{x-y}$$

$$- \frac{1}{(p_0, p_0)} \, \frac{p_1(x)\, p_0(y) - p_0(x)\, p_1(y)}{x-y}$$

Comme $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x + \alpha$, on a

$$\frac{p_1(x)\, p_0(y) - p_0(x)\, p_1(y)}{x-y} = \frac{(x + \cancel{\alpha}) - (y + \cancel{\alpha})}{x-y} = 1 = p_0(x)\, p_0(y),$$

et donc finalement

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{p_n(x)\, p_n(y)}{(p_n, p_n)} = \frac{p_{N+1}(x)\, p_N(y) - p_N(x)\, p_{N+1}(y)}{x-y} \cdot \frac{1}{(p_N, p_N)}$$

<u>Remarque 3</u>. $P_N(x,y)$ vérifie les propriétés :

- $\int_I P_N(x,y)P_N(y,z)\,dy = P_N(x,z)$

- $\int_I P_N(x,x)\,dx = N+1$.

▼ Démonstration directe en utilisant Prop. 1.
Notons aussi que, en tant qu'opérateur, P_N est un projecteur ($P_N^2 = P_N$) et donc ses valeurs propres possibles sont 0 et 1. $\int_I P_N(x,x)\,dx$ peut être interprété comme $\mathrm{Tr}\, P_N = \sum$ v.p. $=$
$= \#\left(\begin{smallmatrix}\text{v.p.}\\ \text{égales à 1}\end{smallmatrix}\right)$. Vecteurs propres correspondants sont $p_0(x), \ldots, p_N(x)$ ($N+1$ vecteurs distincts), d'où le résultat ▼

§3. Polynômes orthogonaux classiques

	$\omega(x)$	I
Hermite	e^{-x^2}	$\mathbb{R}$
Laguerre	$x^a e^{-x}$	$\mathbb{R}_{>0}$
Jacobi	$(1-x)^a(1+x)^b$	$(-1,1)$
Cauchy	$(1+x^2)^{-\alpha}$	$\mathbb{R}$

Jacobi avec $a=b=0 \Rightarrow$ polynômes de Legendre

La propriété commune de tous ces polynômes est que

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{g(x)}{f(x)},$$ où f, g sont deux polynômes et $\deg f \le 2$, $\deg g \le 1$.

<u>Exemple 4</u>. Pour les polynômes de Jacobi

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = -\frac{a(1+x)-b(1-x)}{1-x^2} \Rightarrow \begin{array}{l} f = 1-x^2 \\ g = (a-b)+(a+b)x \end{array}$$

Définissons l'opérateur différentiel L (de 1er ordre):

$$L = f\,\frac{d}{dx} + \frac{f'-g}{2}$$

polynômes de degré 1

Prop. 5 L'opérateur L est antisymétrique p.r. au produit scalaire associé au poids $\omega(x)$, c'est-à-dire:

$$(\varphi, L\psi) = -(L\varphi, \psi) \qquad \forall \varphi, \psi$$

si $\omega(x) = 0$ aux extrémités de I.

▼ Montrons d'abord que

(2) $$L = \sqrt{\frac{f}{\omega}} \circ \frac{d}{dx} \circ \sqrt{f\omega}.$$

Effectivement,

$$\sqrt{\frac{f}{\omega}} \circ \frac{d}{dx} \circ \sqrt{f\omega}\,\varphi = \sqrt{\frac{f}{\omega}}\left(\sqrt{f\omega}\,\varphi' + \frac{1}{2\sqrt{f\omega}}(f'\omega + f\omega')\varphi\right)$$

$$= f\varphi' - \frac{1}{2\omega}(f'\omega + f\omega')\varphi =$$

$$= f\varphi' + \left(\frac{f'}{2} + \frac{f}{2}\,\frac{\omega'}{\omega}\right)\varphi =$$

$$= f\varphi' + \frac{f'-g}{2}\,\varphi = L\varphi.$$

D'autre part, en utilisant (2), on a

$$(\varphi, L\psi) = \int_I \omega(x)\,\varphi(x)\,\sqrt{\frac{f(x)}{\omega(x)}}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)\omega(x)}\,\psi(x)\right) dx$$

$$= \int_I \sqrt{f(x)\omega(x)}\,\varphi(x)\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)\omega(x)}\,\psi(x)\right) dx$$

$$= \cancelto{0}{f(x)\,\omega(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\Big|_\alpha^\beta}$$

$$- \int_I \frac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)\omega(x)}\,\varphi(x)\right)\left(\sqrt{f(x)\omega(x)}\,\psi(x)\right) dx$$

$$= -(L\varphi, \psi)$$

▼

Considérons ensuite la "matrice" des produits scalaires $L_{jk} = (p_j(x), L p_k(x))$, où $j, k = 0, 1, 2, \ldots$. La Proposition 5 implique que cette matrice est antisymétrique, c'est-à-dire $L_{jk} = -L_{kj}$ $\forall j, k$.

Notons aussi que

$$L p_k(x) = \underbrace{f(x)\, p_k'(x)}_{\text{poly}_{k+1}(x)} + \underbrace{\frac{f'-g}{2}\, p_k(x)}_{\text{poly}_{k+1}(x)} = \text{poly}_{k+1}(x)$$

(puisque $\deg f \leq 2$, $\deg g \leq 1$)

- supposons que $j > k$ (si $j < k$, on peut exprimer $L_{jk} = -L_{kj}$ grace à l'antisymétrie et en notant $k = j'$, $j = k'$, on voit que $L_{jk} = -L_{j'k'}$ avec $j' > k'$).
- si de plus $k < j-1$, on a $L p_k(x) = \text{poly}_{k+1}(x)$, et comme le degré de ce polynôme est $< j$, on en déduit $L p_k(x) \perp p_j(x)$.
- par conséquent les seuls $L_{jk} \neq 0$ (avec $j > k$) sont $L_{j,j-1}$. De même, les seuls $L_{jk} \neq 0$ avec $j < k$ sont $L_{j,j+1}$. Donc on obtient une matrice tridiagonale

$$\| L_{jk} \| = \begin{pmatrix} 0 & c_0 & 0 & & 0 \\ -c_0 & 0 & c_1 & 0 & \\ 0 & -c_1 & 0 & c_2 & \\ \vdots & 0 & -c_2 & 0 & \ddots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

<u>Corollaire 6.</u> il existe $c_0, c_1, c_2, \ldots$ tels qu'on a une formule de dérivation

$$(*) \qquad L p_k(x) = -c_k \frac{p_{k+1}(x)}{(p_{k+1}, p_{k+1})} + c_{k-1} \frac{p_{k-1}(x)}{(p_{k-1}, p_{k-1})}$$

▼ Nous avons montré que $L p_k(x) = \alpha\, p_{k+1}(x) + \beta\, p_{k-1}(x)$. Pour montrer que α et β sont donnés par $(*)$, il faut considérer le produit scalaire de cette relation avec $p_{k\pm1}(x)$. ▼

Prop. 7 (formule de Rodrigues pour les polynômes de Legendre).
Les polynômes de Legendre s'écrivent :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \tag{3}$$

▼ 1). Notons d'abord que le polynôme $P_n(x)$ défini par (3) est de degré n, car

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{poly}_{2n}(x) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n} + \mathrm{poly}_{2n-1}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{(2n)!}{n!} x^n + \mathrm{poly}_{n-1}(x)\right).$$

2). Montrons que si $m \neq n$, alors $P_m(x)$ et $P_n(x)$, définis par (3), sont orthogonaux. Supposons par exemple que $m < n$, alors :

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \, dx =$$

$= \left(\begin{array}{l}\text{intégrons une fois par partie}\\ \text{pour transférer une dérivée p.r. à } x\\ \text{du 1er facteur sur le 2ème}\end{array}\right) =$

$$= \frac{1}{2^{n+m} n!\, m!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \quad \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$- \frac{1}{2^{n+m} n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \, dx \;(=)$$

$= \left(\begin{array}{l}\text{dans la contribution du bord, } (x^2-1)^n =\\ = (x-1)^n (x+1)^n \text{ à un zéro d'ordre } n \text{ en}\\ x = \pm 1, \text{ mais cette expression est dérivée}\\ \text{seulement } (n-1) \text{ fois; donc en } x=\pm 1 \text{ elle}\\ \text{est est égale à } 0.\end{array}\right)$

$$(=) \frac{(-1)}{2^{n+m} n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m \, dx =$$

$= \left(\begin{array}{l}\text{on répète la même}\\ \text{procédure encore } m-1 \text{ fois}\end{array}\right) =$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{n+m} n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x^2-1)^m \, dx =$$

$$= \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} (x^2-1)^m = \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \left(x^{2m} + \mathrm{poly}_{2m-1}(x) \right) = \atop = 2m \cdot (2m-1) \cdot \ldots \cdot 1 = (2m)! \right) =$$

$$= \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{n+m} n!\, m!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n \, dx = \left(\begin{array}{c} \text{car} \\ n-m>0 \end{array} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{n+m} n!\, m!} \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^2-1)^n \right]_{x=-1}^{x=1} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{par le même argument} \\ \text{qu'on a utilisé pour} \\ \text{intégrer par parties} \end{array} \right) = 0.$$

3). Nous avons donc une suite des polynômes, orthogonaux sur $(-1,1)$ avec poids $w(x)=1$. Il reste à montrer que pour les $P_n(x)$ définis par (3) nous avons $P_n(1)=1$. Effectivement:

$$\Bigg[\frac{1}{2^n n!} \underbrace{\frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n (x+1)^n}_{} \Bigg]_{x=1} = \frac{1}{2^n n!} \left\{ n!\,(x+1)^n + \begin{array}{c} \text{termes} \\ \text{qui s'annulent} \\ \text{en } x=1 \end{array} \right\}_{x=1}$$

en appliquant la dérivée on obtient une expression avec beaucoup de termes, mais en $x=1$ ils sont presque tous nuls; le seul terme non-nul correspond à l'application de toutes les dérivées au facteur $(x-1)^n$.

$$= \frac{1}{2^n n!} \cdot n!\, 2^n = 1$$

CQFD ▼